数理解析研究所講究録 第2115巻 2019年 135-139

無限過去を持つ時間発展の情報系分解問題について

矢野孝次 (京都大学大学院理学研究科)
Kouji Yano (Graduate School of Science, Kyoto University)

無限過去を持つ (離散) 時間発展とは，直前の時刻から次の時刻への経過の際に駆動ノイズが混入することで推移する確率過程であって，負の無限大の時刻からくるものを言う．このとき，観測過程の情報系 (σ-field) を，駆動ノイズ，無限過去ノイズおよび第三のノイズに分解することが本稿のテーマである．本稿は解説 [6] に対する補足である．

ランダム写像による時間発展で無限過去を持つものを考える．詳しく言うと，状態空間 V に値をとる観測過程 $\{X_k\}$ と，V を V 自身に写す写像からなるある集合 Σ に値をとる iid 駆動ノイズ $\{N_k\}$ であって，次の方程式を満たすものである:

$$X_k =_{\mathbb{P}} N_k X_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

ここで，点 $v \in V$ の写像 $f \in \Sigma$ による像 $f(v)$ を簡単に fv と書いた．また，$=_{\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}$-a.e. での成立を意味する．ここで，$N_{k,j} = N_k N_{k-1} \cdots N_{j+1}$ $(k > j)$ と書くとき

$$X_j =_{\mathbb{P}} N_{j,k_0} X_{k_0}, \quad j > k_0 \tag{0.2}$$

となることに注意すると，**系の情報系** $\mathcal{F}_k^{X,N} = \sigma(X_j, N_j : j \le k)$，**駆動ノイズの情報系** $\mathcal{F}_k^N = \sigma(N_j; j \le k)$，**観測過程の情報系** $\mathcal{F}_k^X = \sigma(X_j; j \le k)$ の間には

$$\mathcal{F}_k^{X,N} =_{\mathbb{P}} \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{k_0}^X, \quad k \ge k_0 \tag{0.3}$$

なる式が成立する．但し，$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ であり，$\mathcal{F} =_{\mathbb{P}} \mathcal{G}$ とは $\mathcal{F} \vee \mathcal{N} = \mathcal{G} \vee \mathcal{N}$ (ここで $\mathcal{N}$ は $\mathbb{P}$-零集合の全体) を意味する．k_0 が任意であったことに注意すると，

$$\mathcal{F}_k^{X,N} =_{\mathbb{P}} \bigcap_{k_0} \left(\mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{k_0}^X\right) \supset_{\mathbb{P}} \mathcal{F}_k^N \vee \left(\bigcap_{k_0} \mathcal{F}_{k_0}^X\right) = \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{0.4}$$

が得られる．ここで，**無限過去の情報系**を $\mathcal{F}_{-\infty}^X = \bigcap_k \mathcal{F}_k^X$ と書いた．

ここで問いたいのは，式 (0.4) の包含関係において「何を補えば等号にできるか?」という問題である．詳しく言うと，**独立補完**，すなわち，**情報系分解**

$$\mathcal{F}_k^{X,N} =_{\mathbb{P}} \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \mathcal{G}_k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{0.5}$$

を与えるような情報系 $\mathcal{G}_k$ であって，$\mathcal{F}_k^N$, $\mathcal{F}_{-\infty}^X$, $\mathcal{G}_k$ の三者が独立なるものが見出せるか，という問題である．付随する問題として，$\mathcal{F}_k^X$ の独立補完，すなわち

$$\mathcal{F}_k^X =_{\mathbb{P}} \mathcal{G}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \mathcal{G}'_k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{0.6}$$

[(0)] The author was supported by MEXT KAKENHI grant no.'s 26800058, 15H03624 and 16KT0020 and by JSPS-MAEDI Sakura program.

を満たすような情報系 $\mathcal{G}_k^N \subset \mathcal{F}_k^N$ および $\mathcal{G}'_k$ であって，$\mathcal{F}_k^N$, $\mathcal{F}_{-\infty}^X$, $\mathcal{G}'_k$ が独立なるものを見出せるか，という問題がある．

この問題は，常微分方程式にはない確率微分方程式に特有の問題として提示された Tsirelson [2] の例に端を発する．Yor [5] は一次元トーラスの場合の一般論を展開し，独立補完 $\mathcal{G}_k$ を生成する**第三のノイズ**を特定した．一方，矢野 [3] は有限集合におけるランダム写像による時間発展を調べ，同期的でなければ第三のノイズが発生することを示した．いずれの研究においても，第三のノイズの独立性は，一様分布に従う確率変数によって生成されているという事実から証明される．

解説 [6] では，Yor の結果と矢野の結果の具体例を述べた．本稿ではこれを補足すべく，有限集合の場合の情報系分解問題に焦点を当て，具体例の考察を掘り下げる．なお，関連した解説記事に [4, 7, 8] がある．

1　一次元トーラスの場合

状態空間 V は一次元トーラス $\mathbb{T}$ とし，これを区間 $[0,1)$ に mod 1 による和の構造を入れたものと同一視する．点 $a \in \mathbb{T}$ と対応する平行移動写像 $f_a(x) = a + x$ との同一視の下で，$\Sigma = \mathbb{T}$ とする．与えられた $\mathbb{T}$ 上の確率分布 μ に対し，次の方程式を考える:

$$X_k =_{\mathbb{P}} N_k + X_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

但し，$\{X_k\}$ と $\{N_k\}$ はともに $\mathbb{T}$ 値であって，各 k で N_k は $\mathcal{F}_{k-1}^{X,N}$ と独立であり，さらに N_k は分布 μ を持つとする．Yor [5] は μ の Fourier 係数の条件によって独立補完を一般に特定した．ここでは，μ が二点分布

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b, \quad a, b \in \mathbb{T}. \tag{1.2}$$

の場合の結果をおさらいする (これは特殊な場合であるが，一般の結果を類推するに十分である)．なお，証明は解説 [6] でも触れたので，ここでは省略する．

ここで，$\mathbb{T}$ における和演算は常に逆を持つから，式 (1.1) は

$$N_k =_{\mathbb{P}} X_k - X_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.3}$$

の形に書き直せるため，情報系分解 (0.5) と (0.6) とは等価であり，いずれも

$$\mathcal{F}_k^X =_{\mathbb{P}} \mathcal{F}_k^N \vee \mathcal{F}_{-\infty}^X \vee \mathcal{G}_k, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.4}$$

の形に書き換わる．なお，結論を言うと，適当な $\mathcal{G}_k$ をとることで式 (1.4) はつねに成立する．

(1) $b=a$ の場合 (すなわち一点分布 $\mu=\delta_a$ の場合). このとき X_k-ak が (a.s. で)k によらないことから,

$$\mathcal{F}^X_{-\infty}=_{\mathbb{P}}\sigma(X_0),\quad \mathcal{F}^N_k=_{\mathbb{P}}\mathcal{G}_k=_{\mathbb{P}}\tau:=\{\emptyset,\Omega\} \tag{1.5}$$

として式 (1.4) が成立する.

(2) $b=a+n/p$ ($p=2,3,\ldots$, $\gcd(n,p)=1$) のとき.

$$H_p=\{0,1/p,\ldots,(p-1)/p\},\quad S_p=[0,1/p) \tag{1.6}$$

とおき, 同型 $\mathbb{T}\simeq S_p\times H_p$ を

$$\mathbb{T}\ni x=\left(x-\frac{[px]}{p}\right)+\frac{[px]}{p}=:s_px+h_px \tag{1.7}$$

と書く ($[a]$ は a を超えない最大整数). このとき $s_p(X_k-ak)$ が (a.s. で)k によらないことと, $U_k:=h_p(X_k-ak)$ が H_p 上の一様分布に従うことから, 次式で式 (1.4) が成立する:

$$\mathcal{F}^X_{-\infty}=_{\mathbb{P}}\sigma(s_pX_0),\quad \mathcal{G}_k:=\sigma(U_k). \tag{1.8}$$

(3) 上記以外の場合. このとき X_k は $\mathbb{T}$ 上の一様分布に従い, 次式で式 (1.4) が成立する:

$$\mathcal{F}^X_{-\infty}=_{\mathbb{P}}\tau,\quad \mathcal{G}_k:=\sigma(X_k). \tag{1.9}$$

2 有限集合の場合

V を有限集合とし, Σ を V から V 自身への写像の全体とする. 与えられた Σ 上の確率分布 μ に対し, 次の方程式を考える:

$$X_k=_{\mathbb{P}}N_kX_{k-1},\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

但し, $\{X_k\}$ は V 値, $\{N_k\}$ は Σ 値であって, 各 k で N_k は $\mathcal{F}^{X,N}_{k-1}$ と独立であり, さらに N_k は分布 μ を持つとする. このとき過程 $\{X_k\}$ 単独でマルコフ過程であり, 推移確率は

$$P(y,x):=\mathbb{P}(X_k=y\mid X_{k-1}=x)=\int_\Sigma\mu(\mathrm{d}f)1_{\{f(x)=y\}} \tag{2.2}$$

で与えられる. μ に対して P は一意に定まるが, 対応 $\mu\mapsto P$ は単射ではない.

μ が**同期的**とは, ある有限列 $f_1,\ldots,f_p\in\Sigma$ が存在して各 $i=1,\ldots,p$ で $\mu\{f_i\}>0$ かつ $\#f_1\cdots f_pV=1$ なることを言う (但し, $\#A$ は集合 A の元の個数を表す). 矢野 [3] は, 対応する推移確率 P が既約 (すなわち, 任意の $x,y\in V$ に対しある n で $P^n(y,x)>0$) という仮定の下で, μ が同期的でなければ第三のノイズが生ずることを示した. ここでは,

$$\mu=\frac{1}{2}\delta_f+\frac{1}{2}\delta_g,\quad f,g\in\Sigma \tag{2.3}$$

すなわち μ が二点分布で与えられる二つの例を掘り下げる.

(1) $V=\{1,2,3,4,5\}$ とし，写像 $f,g:V\to V$ を以下で定める:

$$f1=2,\ f2=3,\ f3=4,\ f4=2,\ f5=5,\quad g1=2,\ g2=5,\ g3=5,\ g4=1,\ g5=4. \tag{2.4}$$

このとき P はエルゴード的 (すなわち，ある n が存在して任意の $x,y\in V$ で $P^n(y,x)>0$) であり，唯一の不変確率を持ちそれは次で与えられる:

$$\lambda=\frac{1}{9}(1\delta_1+2\delta_2+1\delta_3+2\delta_4+3\delta_5). \tag{2.5}$$

さらに，$gfggfV=\{2\}$ となるから，μ は同期的である．この場合は

$$\mathcal{F}_k^X\subset_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N,\quad \mathcal{F}_k^{X,N}=_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N,\quad \mathcal{F}_{-\infty}^X=_{\mathbb{P}}\tau \tag{2.6}$$

が成り立っている．言い換えると，$\mathcal{G}_k:=\tau$ として式 (0.5) が成立するとともに，$\mathcal{G}_k^N:=\mathcal{F}_k^N$ および $\mathcal{G}'_k:=\tau$ として式 (0.6) が成立する．

(2) $V=\{1,2,3,4,5\}$ とし，写像 $f,g:V\to V$ を以下で定める:

$$f1=2,\ f2=3,\ f3=4,\ f4=1,\ f5=5,\quad g1=2,\ g2=5,\ g3=5,\ g4=2,\ g5=4. \tag{2.7}$$

前述の (1) の場合とは 4 の行先が入れ替わっているだけであるから，同一の推移確率 P が対応し，エルゴード的であり，同一の不変確率を唯一の不変確率に持つ．一方この場合は，集合 $\{1,3,5\}$ と $\{2,4,5\}$ の上で f,g が単射であるから，前述の (1) の場合とは異なり μ は同期的ではない．

ここで $gV=\{2,4,5\}$ に注意して，各 $k\in\mathbb{Z}$ に対し

$$T_k=\sup\{j\le k: N_j=g\} \tag{2.8}$$

と定める．このとき，X_{T_k} は $\mathcal{F}_k^N$ と独立かつ $\{2,4,5\}$ 上の一様分布になることが示される (証明は [6] を見よ)．また，エルゴード性により $\mathcal{F}_{-\infty}^X=_{\mathbb{P}}\tau$ が成立しているが，さらに

$$\mathcal{F}_k^{X,N}=_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N\vee\sigma(X_{T_k}) \tag{2.9}$$

が成立することが分かる．実際，$\mathcal{F}_k^{X,N}\subset_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N\vee\sigma(X_{T_k})$ が自明でないが，$j\le k$ に対し

$$\{X_j=x\}\cap\{j\ge T_k\}=\{N_{j,T_k}X_{T_k}=x\}\cap\{j\ge T_k\}\in_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N\vee\sigma(X_{T_k}) \tag{2.10}$$

であり，また $j<T_k$ のとき $X_{T_k}=N_{T_k,T_j}X_{T_j}$ および写像 N_{T_k,T_j} が集合 $\{2,4,5\}$ の上の全単射であることに注意すると

$$\{X_j=x\}\cap\{j<T_k\}=\{N_{j,T_j}(N_{T_k,T_j})^{-1}X_{T_k}=x\}\cap\{j<T_k\}\in_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N\vee\sigma(X_{T_k}) \tag{2.11}$$

が分かるから，$\mathcal{F}_k^{X,N}\subset_{\mathbb{P}}\mathcal{F}_k^N\vee\sigma(X_{T_k})$ が言える．

式 (2.9) を言い換えると，$\mathcal{G}_k:=\sigma(X_{T_k})$ として式 (0.5) が成立することがわかる．しかしながらこの例において，適当な $\mathcal{G}_k^N$ と $\mathcal{G}'_k$ をとって式 (0.6) を成立させることができるかどうかは，分かっていない．

参考文献

[1] L. Chaumont and M. Yor. *Exercises in probability.* Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning.

[2] B. S. Tsirelson. An example of a stochastic differential equation that has no strong solution. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 20(2):427–430, 1975.

[3] K. Yano. Random walk in a finite directed graph subject to a road coloring. *J. Theoret. Probab.*, 26(1):259–283, 2013.

[4] K. Yano and M. Yor. Around Tsirelson's equation, or: The evolution process may not explain everything. *Probab. Surv.*, 12:1–12, 2015.

[5] M. Yor. Tsirel′son's equation in discrete time. *Probab. Theory Related Fields*, 91(2):135–152, 1992.

[6] 矢野孝次．初期時刻のない確率方程式の解の情報系について．ランダム力学系理論とその応用, 数理解析研究所講究録, 1942, 11–18. 2015.

[7] 矢野孝次・安富健児．道路着色問題と整数径数のランダムウォークについて．力学系研究集会—理論から応用へ、応用から理論へ—, 数理解析研究所講究録, 1742, 13–22, 2011.

[8] K. Yano and Y. Takahashi. Time evolution with and without remote past. Recent Developments in Dynamical Systems, RIMS Kōkyūroku, 1552, 164–171, 2007.